TD numéro 2

Exercice 1. En utilisant le théorème de normalisation de Noether, démontrer le résultat ci-dessous :

Si k est un corps algébriquement clos, et si $A = k[X_1, ..., X_n]/I$ est une $k-$algèbre de type fini, alors il existe une bijection entre les points fermés de $\mathrm{Spec}(A)$ et l'ensemble :

$$Z(I) = \{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in k^n \mid \forall P \in I,\ P(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0\}.$$

Remarque : Cet exercice permet de faire le lien entre les points fermés du spectre d'une $k-$algèbre de type fini et les solutions d'un système d'équations polynomiales sur k, ce qui constitue l'objet principal de l'étude de la géométrie algébrique.

Exercice 2. Soit A un anneau. Pour tout $f \in A$, on note D_f le complémentaire de $V(f)$ dans $X = \mathrm{Spec}(A)$

(*rappel :* les D_f forment une base d'ouverts pour la topologie de Zariski). Montrer que

1. $D_f \cap D_g = D_{fg}$,
2. $D_f = \emptyset \iff f$ est nilpotent,
3. $D_f = X \iff f$ est inversible,
4. $D_f = D_g \iff \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.

Exercice 3. Un espace topologique X est dit *quasi-compact* si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, il existe un sous-recouvrement $(U_i)_{i\in J}$ de X, avec J une partie finie de I.

1. Montrer que tout sous-espace fermé d'un espace quasi-compact est quasi -compact.
2. Si A est un anneau, montrer que $\mathrm{Spec}(A)$ est quasi-compact.
3. Montrer qu'en général $\mathrm{Spec}(A)$ peut contenir des ouverts qui ne sont pas quasi-compacts.
4. Montrer que, pour tout $f \in A$, D_f est quasi-compact.
5. Montrer qu'un ouvert de $\mathrm{Spec}(A)$ est quasi-compact si et seulement si c'est l'union finie d'ouverts D_f.

Exercice 4. *Rappels sur la localisation :* Si A est un anneau et S une partie multiplicative de A (i.e un sous-ensemble de A contenant 1 et stable pour la multiplication), on définit l'anneau $S^{-1}A$ dont les éléments sont notés formellement a/s pour $a \in A,\ s \in S$ et vérifient $a_1/s_1 = a_2/s_2$ si et seulement s'il existe $s \in S$ tels que $s(s_2a_1 - s_1a_2) = 0$. On note

$$(a_1/s_1) + (a_2/s_2) = (s_2a_1 + s_1a_2)/(s_1s_2)$$

$$(a_1/s_1) \times (a_2/s_2) = (a_1a_2)/(s_1s_2).$$

L'application $a \mapsto a/1$ définit une application canonique $A \to S^{-1}A$.
Si $S = (1, f, f^2, ...)$ pour $f \in A$, on note A_f pour $S^{-1}A$.
Si $S = A \setminus \mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, on note $A_{\mathfrak{p}}$ pour $S^{-1}A$.

Soit A un anneau, I un idéal de A et S une partie multiplicative de A.

1. Montrer que les applications $\mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Spec}(S^{-1}A) \to \mathrm{Spec}(A)$, induites respectivement par les applications naturelles $A \to A/I$ et $A \to S^{-1}A$, sont injectives.
2. Montrer que $\mathrm{Spec}(A/I)$ peut être identifié à un sous-ensemble fermé de $\mathrm{Spec}(A)$.
3. Si $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pour $f \in A$, montrer que $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ peut être identifié à un sous-espace ouvert de $\mathrm{Spec}(A)$. Montrer que ceci n'est pas nécessairement vrai pour S quelconque.
4. Montrer que les topologies de Zariski sur $\mathrm{Spec}(A/I)$ et $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ coïncident avec la topologie induite par l'inclusion de ces ensembles dans $\mathrm{Spec}(A)$.

Exercice 5. Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'algèbres de type fini sur un corps k. Montrer que l'application $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ induite par ϕ envoie un point fermé sur un point fermé.

Exercice 6. Soit A une $k-$algèbre de type fini. Montrer que l'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}(A)$ est dense dans $\mathrm{Spec}(A)$.

Exercice 7. Soit A un anneau. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Spec}(A)$ n'est pas connexe,
2. il existe des éléments non nuls $e_1, e_2 \in A$ tels que $e_1 e_2 = 0,\ e_1^2 = e_1,\ e_2^2 = e_2,\ e_1 + e_2 = 1$,
3. A est isomorphe à un produit direct de deux anneaux non nuls.

Exercice 8. Soit A un anneau.

1. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A. Montrer que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est nilpotent. En déduire que tout élément de $\mathfrak{p}$ est un diviseur de zéro dans A.
2. Montrer que, si A est réduit, alors tout diviseur de zéro appartient à un idéal premier minimal. Montrer que ceci est faux en général lorsque A n'est pas réduit.